



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΚΥΤΤΑΡΟ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161

A4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική.

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει: $f'(1) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

Άρα:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 + 2a + 9 = 0$$

$$a = -6$$

B2. Έχουμε:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, \text{ άρα}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Οπότε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	○	−	○	+
f					

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και $f'(x) > 0$ στο $(1, 3)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

Στο διάστημα $A_1 = [0, 1]$, έχουμε:

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

Άρα: $f(A_1) = [-3, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, έχει μία μοναδική ρίζα $x_1 \in (0, 1) \subset (-\infty, 1]$, με $x_1 > 0$.

Στο διάστημα $A_2 = [1, 3]$, έχουμε:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$$

Άρα: $f(A_2) = [-3, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 , έχει μία μοναδική ρίζα $x_2 \in (1, 3)$, με $x_2 > 0$.

Στο διάστημα $A_3 = [3, +\infty)$, έχουμε:

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Άρα: $f(A_3) = [-3, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_3 , έχει μία μοναδική ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$, με $x_3 > 0$.

Άρα η f έχει 3 μοναδικές θετικές ρίζες

B3. Έχουμε:

$$f''(x) = 6x - 12, \text{ άρα:}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, οπότε:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-		+
f	$\cap$		$\cup$

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(2, -1)$.

B4. Έστω:

$$\begin{aligned} y - f(\xi) &= f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow \\ y &= f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1) \end{aligned}$$

η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x = \xi$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $g'(x) = 1 + f'(x)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο $x = \xi$ είναι:

$$\begin{aligned} y - g(\xi) &= g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow \\ y - (\xi + f(\xi)) &= (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Leftrightarrow \\ y &= (1 + f'(\xi))(x - \xi) + (\xi + f(\xi)) \quad (2) \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{aligned} f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) &= (1 + f'(\xi))(x - \xi) + (\xi + f(\xi)) \Leftrightarrow \\ f'(\xi)x - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) &= x - \xi + f'(\xi)x - \xi \cdot f'(\xi) + \xi + f(\xi) \Leftrightarrow \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Άρα οι εφαπτομένες των f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 0$, δηλαδή πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0 = f(0) \setminus$$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \text{ και } \sqrt{x} > 0 \text{ κοντά στο } x_0 = 0.$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες ασύμπτωτες

Στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x$$

$$\overset{e^x > 0}{-1 \leq \eta \mu x \leq 1} \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$$

Η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty, \text{ άρα η } C_f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

Πλάγιες ασύμπτωτες

Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$, άρα δεν έχει πλάγια στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \overset{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} = \beta$$

Η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση $\xi \in (-\pi, 0)$

$$\text{Έστω } g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2} = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$$

- g συνεχής στο $[-\pi, 0]$
- $g(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0)g(-\pi) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε

$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$, άρα η C_f και η $y = x + \frac{1}{2}$ έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. $y = f(x), \quad x \geq 0$

$$M(x(t), y(t)) \in C_f \Leftrightarrow y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (2x(t)x'(t) + x'(t))$$

$$y'(t) = \frac{x'(t)[2x(t) + 1]}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Για } t = t_0, \quad y'(t_0) = x'(t_0) > 0$$

$$\cancel{y'(t_0)} = \frac{\cancel{x'(t_0)}[2x(t_0) + 1]}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = x(t_0) + \frac{1}{2} \stackrel{x(t_0) \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) + x(t_0) = \left(x(t_0) + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(t_0) + x(t_0) = x^2(t_0) + x(t_0) + \frac{1}{4}, \text{ αδύνατη}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 , στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του του σημείου M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

ΘΕΜΑ Δ

f στο $(0, +\infty)$

F είναι παράγουσα της f

$$x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x, \quad x > 0$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$, άρα

$$f'(1) = 2$$

$$\Delta 1. \quad g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{x \cdot f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x \cdot (x^{\ln x})^2} = \frac{x^{\ln x} \cdot (x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot \ln x)}{x \cdot (x^{\ln x})^2} = 0, \text{ για κάθε} \end{aligned}$$

$$x \in \Delta = (0, +\infty), \text{ άρα υπάρχει } c \in \mathbb{R} : g(x) = c \text{ ή } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$$

$$\Delta 2. \quad (i) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2,$$

$$\text{όπου } f(1) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH} \frac{1}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad x f(x) &= 2F(x) \ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{2F(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 = \frac{2F(1)}{1} \Rightarrow F(1) = 1 \end{aligned}$$

$$G(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow F(x) = x^{\ln x} \cdot c \xrightarrow{x=1} F(1) = 1^{\ln 1} \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1^0 \cdot c \Rightarrow c = 1, \text{ άρα } F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

Δ3. Έχουμε:

- $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$, άρα:
- $F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = F(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, όπου $F(x) > 0$
- $F'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, άρα:

x	0	1	$+\infty$
F'	-	0	+
F	↘		↗

Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$, δηλαδή:

$$F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1$$

Για κάθε $x > 0$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ γίνεται:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \quad (1)$$

για $x = 1$ γίνεται:

$$F(1^2) - F(1) = -(1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) - F(1) = 0$$

που ισχύει άρα το $x = 1$ είναι λύση της (1).

Για $x \in (0,1)$: $x > x^2$ ^{F γνησ.φθίν} $\Rightarrow F(x) < F(x^2) \Rightarrow$

$F(x^2) - F(x) > 0$ και $-(x-1)^2 < 0$, άρα η (1) είναι αδύνατη

Για $x \in (1,+\infty)$: $x^2 > x$ ^{F γνησ.αύξουσα} $\Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow$

$F(x^2) - F(x) > 0$ και $-(x-1)^2 < 0$, άρα η (1) είναι αδύνατη

Συνεπώς η (1) είναι αδύνατη για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, οπότε μοναδική λύση η $x = 1$

Δ4. Έστω: $E = \int_1^e |F(x)| dx$. Επειδή $F(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$, άρα:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = E = \int_1^e F(x) dx$$

Έχουμε: $F(x) = e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$,

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ και όχι για κάθε $x \in [1, e]$, άρα:

$$\int_1^e F(x)dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)dx \Rightarrow$$

$$E > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$E > \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx + (e - 1) \Rightarrow$$

$$E > (x \ln^2 x)_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > (x \ln^2 x)_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e \ln^2 e - 1 \cdot 0 - \int_1^e 2 \ln x dx + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e - 2[x \ln x - x]_1^e + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > e - 2(e - e - (0 - 1)) + e - 1 \Rightarrow$$

$$E > 2e - 3$$



Η διδακτική ομάδα