ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ κύτταρο

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)

Α4. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τη συνάρτηση $f = g \circ h$, έχουμε:

$x \in A_h \Rightarrow$ και $h(x) \in A_g \Rightarrow$

$x > 0$ $\ln x \in \mathbb{R}$, που ισχύει

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2. **i**. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{4}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{4}{x} - x$$

Άρα:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ii. Έχουμε:

$$e < \pi \Rightarrow f(e) > f(\pi) \Rightarrow$$

$$\frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \xRightarrow{\frac{\pi}{4-e^2}<0}$$

$$\frac{4-e^2}{e} \cdot \frac{\pi}{4-e^2} < \frac{4-\pi^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4-e^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$$

B3. Στο $x = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}+\left(\frac{4-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\left[\left(4-x^2\right)\frac{1}{x}\right] = +\infty \text{, διότι}$$

$\lim\limits_{x\to 0}[4-x^2] = 4$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$. Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-2x^2}{x} = 0$$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x$

B4. Έχουμε:

$$|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \le 1 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| |\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \le 1 \cdot \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Rightarrow$$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Rightarrow$$

$$-\left|\frac{1}{\frac{4-x^2}{x}}\right| \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \left|\frac{1}{\frac{4-x^2}{x}}\right| \Rightarrow$$

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \leq \frac{συν(1+x^2)}{f(x)} \leq \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

όπου: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{-x^2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{-x^2} = 0$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{συν\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx = \int_2^3 x\cdot\left(\frac{1}{x}+α\right)dx = \int_2^3 1+αx\,dx = \left[x+\frac{αx^2}{2}\right]_2^3 = \left(3+\frac{α\cdot 3^2}{2}\right)-\left(2+\frac{α\cdot 2^2}{2}\right)$$

$$= \frac{9α}{2}+3-2-\frac{4α}{2} = \frac{5α}{2}+1$$

Άρα:

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx = 1 \;\Rightarrow\; \frac{5α}{2}+1 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{5α}{2} = 0 \;\Rightarrow\; α = 0$$

Γ2. **i.** Η συνάρτηση f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$$

Για να ορίζεται εφαπτομένη στο $x = 1$ θα πρέπει να ορίζεται το $f'(1)$. Άρα θα πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = 1$. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\; \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (x^2-3x+3) = 1 \\ \bullet\; \lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x),\ \text{άρα} \lim_{x\to1} f(x) = 1$$

Επίσης $f(1) = 1 = \lim\limits_{x\to1} f(x)$, άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Τα πλευρικά όρια της παραγώγου στο $x_0 = 1$:

- $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{x-1} = -1$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{-\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)} = -1$

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$, συνεπώς $f'(1)=-1$

ii. Η εφαπτόμενη ευθεία είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \;\Rightarrow\; y-1=-1(x-1) \;\Rightarrow\; y=-x+2$$

Αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$, επειδή $\lambda=\varepsilon\varphi\theta=-1$, άρα η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι 135^0.

Γ3. Για $x<1$, έχουμε:

$$f'(x)=2x-3<0 \text{ για κάθε } x<1$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x<1$

Επίσης για $x\geq 1$ είναι: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, άρα γνησίως φθίνουσα για $x\geq 1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=1$,αρα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα είναι και 1-1 συνάρτηση.

Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

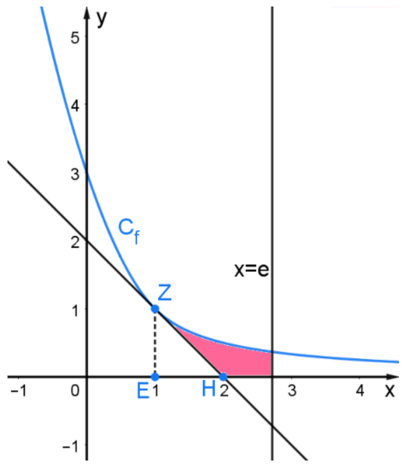
Άρα σύνολο τιμών : $f(A)=(0,+\infty)$

Γ4. Η $y=-x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $H(2,0)$.Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty]$.

Το εμβαδό είναι:

$$E=\int_1^e f(x)\,dx-(EZH)=\int_1^e\frac{1}{x}dx-\frac{(ZE)\cdot(EH)}{2} = [\ln\, x]_1^e-\frac{1}{2}$$

$$=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=l$, τότε: $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}\Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot g(x)+2x$, άρα:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}[(x-1)\cdot g(x)+2x]=2$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, άρα:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \Rightarrow$$

$$\ln(2-1) - \frac{1}{1} + k = 2 \Rightarrow$$

$$k = 2 + 1 = 3$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \qquad x \in (0,2)$$

Έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right)' = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)} = 0 \Rightarrow$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -2$$

και

$$f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)} > 0 \Rightarrow$$

$$(-x^2 - x + 2)(2-x) > 0$$

Το οποίο είναι ανίσωση γινόμενο

Άρα:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
f'		$-$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
f						$\nearrow$		$\searrow$			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2)$. Έχει επίσης ολικό μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 2$.

Στο διάστημα $A_1 = (0,1)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2-x) = \ln 2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f στο A_1 είναι: $f(A_1) = (-\infty, 2)$. Επειδή το $0 \in f(A_1)$, άρα έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 < 1$ στο διάστημα $(0,1)$.

Στο διάστημα $A_2 = (1,2)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(2-x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$

Άρα το σύνολο τιμών της f στο A_2 είναι: $f(A_1) = (-\infty, 2)$. Επειδή το $0 \in f(A_2)$, άρα έχει ακριβώς μία ρίζα $1 < x_2$ στο διάστημα $(1,2)$.

Επίσης: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > \ln 1 = 0$, άρα $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} \frac{1}{3} > x_1$

Δ3. Θέλουμε ένα μοναδικό $\xi \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Επειδή $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. **i.** Εφόσον οι F και G είναι αρχικές συναρτήσεις της f, θα ισχύει: $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$. Άρα:

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow$$
$$F(x) = G(x) + c \;\; (1)$$

για κάθε $x \in (0,2)$

Για $x = x_1$ έχουμε: $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) + c = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = -c \;\; (2)$

Για $x = x_2$ έχουμε: $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c \;\; (3)$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii. Έστω η συνάρτηση $w(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

Η συνάρτηση w είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[x_1, x_2]$.

Επίσης:

$w(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2 \quad (4)$ και

$w(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 \quad (5)$

Επειδή $x_1 < x_2$, άρα: $x_1 - x_2 < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

Επίσης:

$x_1 < x < 1 \Rightarrow 0 = f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$ και

$1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα η f είναι θετική στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Επειδή $F'(x) = f(x) > 0$ στο $[x_1, x_2]$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

Άρα: $x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Rightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

Άρα:

$$w(x_1) = \underbrace{-x_2}_{-}\underbrace{F(x_2)}_{+} + \underbrace{x_1 - x_2}_{-} < 0$$

και

$$w(x_2) = \underbrace{x_1}_{+}\underbrace{F(x_2)}_{+} + \underbrace{x_2 - x_1}_{+} > 0,$$

δηλαδή $w(x_1) \cdot w(x_2) < 0$, άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[x_1, x_2]$, για την w, δηλαδή η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Επίσης:

$$w'(x) = (x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x)' = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$$

Άρα η w είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει μία μοναδική λύση.

Επιμέλεια: Η διδακτική ομάδα

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ κύτταρο