ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 16

Α2. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος

Α3. α) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

β) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

γ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Α4. Σχολικό βιβλίο σελ. 28

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $f_1\% = 40$, άρα $F_1\% = 40$

- $f_1\% = 40$, άρα $F_1\% = 40$
- $F_2\% = F_1\% + f_2\% \Rightarrow$
  $70 = 40 + f_2\% \Rightarrow$
  $f_2\% = 30$
- $F_3\% = F_2\% + f_3\% \Rightarrow$
  $90 = 70 + f_3\% \Rightarrow$
  $f_3\% = 20$

Άρα έχουμε: $f_1 = 0{,}4$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$, $f_4 = 0{,}1$

Για το σύνολο έχουμε:

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0{,}2 = \frac{10}{v} \Rightarrow$$

$$v = \frac{10}{0{,}2} \Rightarrow v = 50$$

Για τις συχνότητες v_ι, έχουμε:

- $f_1 = \dfrac{v_1}{v} \Rightarrow$
  $0{,}4 = \dfrac{v_1}{20} \Rightarrow$
  $v_1 = 0{,}4 \cdot 50 \Rightarrow$
  $v_1 = 8$
- $f_2 = \dfrac{v_2}{v} \Rightarrow$
  $0{,}3 = \dfrac{v_2}{20} \Rightarrow$
  $v_2 = 0{,}3 \cdot 50 \Rightarrow$
  $v_2 = 15$
- $f_4 = \dfrac{v_4}{v} \Rightarrow$
  $0{,}4 = \dfrac{v_4}{20} \Rightarrow$
  $v_4 = 0{,}1 \cdot 50 \Rightarrow$
  $v_4 = 5$

Για τις αθροιστικές συχνότητες έχουμε:

- $N_1 = \nu_1 = 20$
- $N_2 = N_1 + \nu_2 \Rightarrow$
  $N_2 = 20 + 15 \Rightarrow$
  $N_2 = 35$
- $N_3 = N_2 + \nu_3 \Rightarrow$
  $N_3 = 35 + 10 \Rightarrow$
  $N_2 = 45$

και $N_4 = \nu = 50$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	ν_i	$f_i(\%)$	N_i	F_i
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

Β2. Είναι: $f_4\% = 10\%$

Β2. Είναι: $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 5 = 30$

Β2. Είναι: $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 40 + 30 + 20 = 90\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή περνάει από το σημείο $A(-1, -2)$, έχουμε :

$$f(-1) = -2 \Rightarrow$$

$$(-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \Rightarrow$$

$$-1 - \lambda + 2 = -2 \Rightarrow$$

$$-\lambda = -2 - 2 + 1 \Rightarrow$$

$$\lambda = 3$$

Γ2. Είναι: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, άρα:

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

Γ3. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$3x(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$3x=0 \Rightarrow \quad x=0 \qquad \text{ή} \qquad x-2=0 \Rightarrow \quad x=2$$

Άρα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2=2$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=2$ το $f(0)=2^3-3\cdot 2^2+2=-2$

Γ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{6x-6} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-2x+1)}{6(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{6(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{6} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$$f'(x)=[(x^2+4x+5)^{20}]'=20(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x^2+4x+5)'=20(x^2+4x+5)^{19}\cdot(2x+4)$$

Δ2. Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = f'(-2) = 20[(-2)^2+4\cdot(-2)+5]^{19}(2\cdot(-2)+4) = 20\cdot 1^{19}\cdot 0 = 0$$

Δ3.

Έστω $y=\lambda x+\beta\ \ (\varepsilon)$, η εφαπτομένη της f με σημείο επαφής $A(x_0,f(x_0))$ και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=f'(x_0)$$

Επειδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ θα είναι:

$$\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) = 0 \Rightarrow$$

$(x^2 + 4x + 5)^{19} = 0$		$2x + 4 = 0 \Rightarrow$
Που είναι αδύνατη, διότι έχει	ή	$2x = -4 \Rightarrow$
$\Delta < 0$		$x = -2$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\big(-2, f(-2)\big)$

Είναι:

- $x_0 = 2$
- $\lambda = 0$
- $f(x_0) = f(-2) = [(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5]^{20} = 1$

Άρα:

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 1 = 0 \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = 1$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $y = 1$

Δ4. Η απόσταση των σημείων $A(x, 1)$ και $O(0,0)$ είναι:

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης είναι:

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης για $x = 1$ είναι:

$$d(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$